第 44 講　総合問題(4)

1　△ABC において，a＝BC，b＝AC，c＝AB とし，θ＝∠ACB とおく．いま，$a+b=10$，$c=2\sqrt{7}$ で，△ABC の面積が $6\sqrt{3}$ であるとする．このとき，余弦定理から $c^2=(a+b)^2-$ [ア] $ab(1+\cos\theta)$ となるので

$ab(1+\cos\theta)=$ [イウ] である．一方で △ABC の面積が $6\sqrt{3}$ であるから

$ab(1+\cos\theta)=\sqrt{\text{[エ]}}\,ab\sin\theta$　すなわち，$1+\cos\theta=\sqrt{\text{[エ]}}\sin\theta$ である．

この両辺を 2 乗して式を整理すれば，$1+\cos\theta=$ [オ] − [オ] $\cos\theta$ となり，

$\cos\theta=\dfrac{\text{[カ]}}{\text{[キ]}}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{\text{[ク]}}}{\text{[ケ]}}$ と求まる．

従って　$a<b$ とすれば，$a=$ [コ]，$b=$ [サ] である．また，△ABC の外接円の

面積は，$\dfrac{\text{[シス]}}{\text{[セ]}}\pi$ となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x$ について次の問いに答えよ.

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(2)　実数 a に対して，$a \leqq x \leqq a+2$ のときの $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とおく．関数 $b=g(a)$ のグラフの概形を ab 平面上にかけ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 不等式 $0 \leqq x \leqq 60$ と $0 \leqq y \leqq x+2$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

［2］ xy 平面上において，不等式 $0 \leqq y \leqq -x^2+n$ （n は自然数）を満たす格子点（x 座標，y 座標がともに整数である点）の個数を a_n とする．自然数 s に対して，a_{s^2} を s の式で表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 44 講　総合問題(4)

［1］　実数 a に対し，関数 $f(x)=x^3-3x$ の $a\leqq x\leqq a+1$ における最小値は

$a\leqq\dfrac{-\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$ のとき　$a^3-\boxed{オ}a$

$\dfrac{-\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}\leqq a\leqq\boxed{カ}$ のとき　$a^3+\boxed{キ}a^2-\boxed{ク}$

$\boxed{カ}\leqq a\leqq\boxed{ケ}$ のとき　$\boxed{コサ}$　　　$\boxed{ケ}\leqq a$ のとき　$a^3-\boxed{オ}a$

である．

［2］　n を自然数とするとき，$x+y\leqq n$，$x\geqq0$，$y\geqq0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は

$\dfrac{1}{\boxed{シ}}(n+1)(n+\boxed{ス})$ 個ある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　総合問題(4)

[1]　△ABC において，a＝BC，b＝AC，c＝AB とし，θ＝∠ACB とおく．いま，$a+b=10$，$c=2\sqrt{7}$ で，△ABC の面積が $6\sqrt{3}$ であるとする．このとき，余弦定理から $c^2=(a+b)^2-$ [ア] $ab(1+\cos\theta)$ となるので

$ab(1+\cos\theta)=$ [イウ] である．一方で △ABC の面積が $6\sqrt{3}$ であるから

$ab(1+\cos\theta)=\sqrt{[エ]}\,ab\sin\theta$　すなわち，$1+\cos\theta=\sqrt{[エ]}\sin\theta$ である．

この両辺を2乗して式を整理すれば，$1+\cos\theta=$ [オ] $-$ [オ] $\cos\theta$ となり，

$\cos\theta=\dfrac{[カ]}{[キ]}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{[ク]}}{[ケ]}$ と求まる．

従って　$a<b$ とすれば，$a=$ [コ]，$b=$ [サ] である．また，△ABC の外接円の面積は，$\dfrac{[シス]}{[セ]}\pi$ となる．

余弦定理より

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$=(a+b)^2-2ab-2ab\cos\theta=(a+b)^2-\mathbf{2}ab(1+\cos\theta)$

$c=2\sqrt{7}$，$a+b=10$ より

$28=10^2-2ab(1+\cos\theta)$　　よって　$ab(1+\cos\theta)=\mathbf{36}$　……①

また，△ABC の面積が $6\sqrt{3}$ より　$\dfrac{1}{2}ab\sin\theta=6\sqrt{3}$

$ab\sin\theta=12\sqrt{3}$　　よって　$\sqrt{3}\,ab\sin\theta=36$　……②

①，②より　$ab(1+\cos\theta)=\sqrt{\mathbf{3}}\,ab\sin\theta$　　すなわち　$1+\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta$

この両辺を2乗して $(1+\cos\theta)^2=3\sin^2\theta$　　$(1+\cos\theta)^2=3(1-\cos^2\theta)$

$(1+\cos\theta)^2=3(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$　　$\cos\theta\neq-1$ より　$1+\cos\theta=3(1-\cos\theta)$

よって　$1+\cos\theta=\mathbf{3}-3\cos\theta$　より　$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

このとき①より　$ab=24$　　これと $a+b=10$　より

a，b は2次方程式 $t^2-10t+24=0$ の2解である

$(t-4)(t-6)=0$　　$t=4,\ 6$　　$a<b$　より　$a=\mathbf{4}$，$b=\mathbf{6}$

また，△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$\dfrac{c}{\sin\theta}=2R$　　よって　$R=\dfrac{2\sqrt{7}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

したがって外接円の面積は　$\pi R^2=\dfrac{\mathbf{28}}{\mathbf{3}}\pi$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　関数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x$ について次の問いに答えよ.

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ.

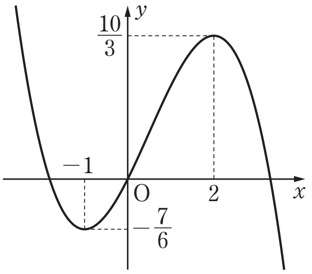
(2)　実数 a に対して，$a \leqq x \leqq a+2$ のときの $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とおく．関数 $b=g(a)$ のグラフの概形を ab 平面上にかけ.

(1)　$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x$　より

$f'(x)=-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$

よって $f(x)$ の増減表は下表．$y=f(x)$ のグラフは右図.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{7}{6}$	↗	$\frac{10}{3}$	↘



(2)　$a<2<a+2$　つまり　$0<a<2$ のときに

$f(a)=f(a+2)$ となるのは

$$-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2+2a=-\frac{1}{3}(a+2)^3+\frac{1}{2}(a+2)^2+2(a+2)$$

$3a^2+3a-5=0$　　$a=\frac{-3\pm\sqrt{69}}{6}$　　つまり　$a=\frac{-3+\sqrt{69}}{6}$ のとき

(i)　$a+2<-1$　つまり　$a<-3$ のとき

$g(a)=f(a+2)$

(ii)　$a \leqq -1 \leqq a+2$　つまり　$-3 \leqq a \leqq -1$ のとき

$g(a)=f(-1)=-\frac{7}{6}$

(iii)　$-1<a<\frac{-3+\sqrt{69}}{6}$ のとき

$g(a)=f(a)$

(iv)　$\frac{-3+\sqrt{69}}{6} \leqq a$ のとき

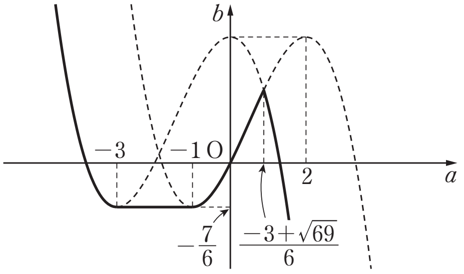
$g(a)=f(a+2)$

ここで $b=f(a+2)$ のグラフは

$b=f(a)$ のグラフを a 軸方向に -2

平行移動したものより，(1)から

$b=g(a)$ のグラフは右図.



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> 3 ［1］ 不等式 $0 \leqq x \leqq 60$ と $0 \leqq y \leqq x+2$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

$x=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 60$ 上にある格子点の個数を数えることにより，
求める個数は

$$3+4+5+\cdots\cdots+63=\frac{61(3+63)}{2}=\mathbf{2013}\ \textbf{（個）}$$

（別解） $x=k$（k は $0 \leqq k \leqq 60$ を満たす整数）上にある格子点の個数は

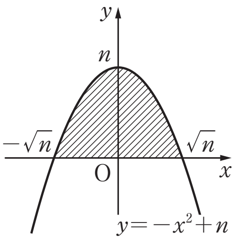
$$(k+2)-0+1=k+3$$

よって求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{60}(k+3)=\frac{61(3+63)}{2}=2013$$

> 3 ［2］ xy 平面上において，不等式 $0 \leqq y \leqq -x^2+n$（n は自然数）を満たす格子点（x 座標，y 座標がともに整数である点）の個数を a_n とする．自然数 s に対して，a_{s^2} を s の式で表せ．

$0 \leqq y \leqq -x^2+n$ の表す領域は右図斜線部（境界含む）．
自然数 s について，$n=s^2$ のとき，$\sqrt{n}=s$
$x=k$（k は $0 \leqq k \leqq s$ を満たす整数）上にある格子点の個数は　$(-k^2+n)-0+1=-k^2+(s^2+1)$
図形の対称性を考慮して



$$\boldsymbol{a_{s^2}}=(s^2+1)+2\sum_{k=1}^{s}\{-k^2+(s^2+1)\}$$
$$=s^2+1+2\left\{-\frac{1}{6}s(s+1)(2s+1)+(s^2+1)\cdot s\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}s^3+\frac{5}{3}s+1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 44 講　総合問題(4)

［1］　実数 a に対し，関数 $f(x)=x^3-3x$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最小値は

$a \leqq \dfrac{-\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$ のとき　$a^3-\boxed{オ}a$

$\dfrac{-\boxed{ア}-\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}} \leqq a \leqq \boxed{カ}$ のとき　$a^3+\boxed{キ}a^2-\boxed{ク}$

$\boxed{カ} \leqq a \leqq \boxed{ケ}$ のとき　$\boxed{コサ}$　　　$\boxed{ケ} \leqq a$ のとき　$a^3-\boxed{オ}a$

である．

［2］　n を自然数とするとき，$x+y \leqq n$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は

$\dfrac{1}{\boxed{シ}}(n+1)(n+\boxed{ス})$ 個ある．

解答例

［1］　$f(x)=x^3-3x$　より　$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減表は右図.

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

ここで，$a \leqq -1 \leqq a+1$　かつ　$f(a)=f(a+1)$

となるときを考える.

$a^3-3a=(a+1)^3-3(a+1)$　　$a^3-3a=a^3+3a^2-2$

$3a^2+3a-2=0$　　$-2 \leqq a \leqq -1$ より　$a=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}$

よって，$a \leqq \dfrac{\mathbf{-3-\sqrt{33}}}{\mathbf{6}}$ のとき　最小値 $f(a)=a^3-\mathbf{3}a$

$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6} \leqq a$　かつ　$a+1 \leqq 1$

つまり　$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6} \leqq a \leqq \mathbf{0}$ のとき　最小値 $f(a+1)=a^3+\mathbf{3}a^2-\mathbf{2}$

$0 \leqq a \leqq \mathbf{1}$ のとき　最小値 $f(1)=\mathbf{-2}$　　　$1 \leqq a$ のとき　最小値 $f(a)=a^3-3a$

［2］　$x=k$（$k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n$）上の格子点の個数は

$(-k+n)-0+1=-k+(n+1)$

よって求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}\{-k+(n+1)\}=(n+1)+\sum_{k=1}^{n}\{-k+(n+1)\}$$

$$=(n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)\cdot n$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2-n+2n\}=\frac{1}{\mathbf{2}}(n+1)(n+\mathbf{2})\ (\text{個})$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。